Kürzbarkeit in Halbgruppen

Sei H eine Halbgruppe. Ein Element $x \in H$ heißt linkskürzbar (rechtskürzbar), wenn für alle $a, b \in H$ gilt: Aus $xa = xb$ ($ax = bx$) folgt $a = b$. x heißt kürzbar, wenn x links- und rechtskürzbar ist. Man sagt, in H gilt die Kürzungsregel, wenn jedes Element von H kürzbar ist. Zeigen Sie:

a) In jeder Gruppe G gilt die Kürzungsregel.

b) H ist Gruppe genau dann, wenn H ein linksneutrales Element e besitzt und wenn es für jedes $x \in H$ ein $x' \in H$ gibt mit $x'x = e$.

c) Sei H eine endliche Halbgruppe. H besitzt genau dann ein linksneutrales (rechtsneutrales, neutrales) Element, wenn H ein linkskürzbares (rechtskürzbares, kürzbares) Element besitzt.

d) Eine endliche Halbgruppe H ist genau dann eine Gruppe, wenn in H die Kürzungsregel gilt.

Hinweis: Für $x \in H$ betrachte man die durch $h \mapsto xh$ bzw. $h \mapsto hx$ für alle $h \in H$ gegebenen Abbildungen $\lambda_x, \rho_x : H \to H$ (Linkstranslation, Rechtstranslation mit x) und beachte, dass x genau dann linkskürzbar bzw. rechtskürzbar ist, wenn λ_x bzw. ρ_x injektiv ist.